§ 6. ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

Для характеристики распределения моментов инерции тела относительно различных осей, проходящих через заданную точку, используется поверхность второго порядка — эллипсоид инерции. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol (см. рис. 31), проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок

$$OK = 1/\sqrt{J_l}. \tag{26}$$

Геометрическое место концов отрезков OK расположится на поверхности, которая называется эллипсоидом инерции. Получим уравнение эллипсоида инерции. Для этого выразим косинусы углов α, β, γ через координаты x, y, z точки K. Имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x}{OK} = \sqrt{J_l}x; \quad \cos\beta = \frac{y}{OK} = \sqrt{J_l}y; \quad \cos\gamma = \frac{z}{OK} = \sqrt{J_l}z.$$

Подставляя эти значения косинусов углов в (24) и сокращая на J_l, получим уравнение поверхности второго порядка:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy = 1. \tag{27}$$

Это действительно уравнение эллипсоида, так как отрезок OK имеет конечную длину для всех осей, для которых моменты инерции не обращаются в нуль. Другие поверхности второго порядка, например гиперболоиды и параболоиды, имеют бесконечно удаленные точки. Эллипсоид инерции вырождается в цилиндр для тела в виде прямолинейного отрезка, если точка O расположена на самом отрезке. Для оси, направленной по этой прямой линии, момент инерции обращается в нуль и соответственно отрезок OK равен бесконечности.

Для каждой точки O имеется свой эллипсоид инерции. Эллипсоид инерции для центра масс тела называют *центральным эллипсоидом инерции.* Оси эллипсоида инерции (его сопряженные диаметры) называются *главными осями инерции.* В общем случае эллипсоид инерции имеет три взаимно перпендикулярные главные оси инерции. Они являются его осями симметрии.

В случае эллипсоида вращения все прямые, расположенные в экваториальной плоскости эллипсоида, перпендикулярной оси вращения, будут главными осями инерции. Для шара любая прямая, проходящая через его центр, есть главная ось инерции.

Моменты инерции относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции,* а относительно главных центральных осей инерции — *главными центральными моментами инерции.*

Если уравнение эллипсоида инерции отнести к его главным осям Ox', Oy', Oz', то оно примет вид

$$J_{x'}x'^2 + J_{y'}y'^2 + J_{z'}z'^2 = 1, \tag{27'}$$

где x', y', z' — текущие координаты точки, расположенной на эллипсоиде инерции, относительно главных осей инерции; $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$ — главные моменты инерции. Уравнение эллипсоида инерции (27′) не содержит слагаемых с произведениями координат точек. Поэтому *центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю,* т. е.

$$J_{y'z'} = 0; \quad J_{z'x'} = 0; \quad J_{x'y'} = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если центробежные моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей равны нулю, то эти оси являются главными осями инерции. Обращение в нуль трех центробежных моментов инерции является необходимым и достаточным условием того, что соответствующие прямоугольные оси координат есть главные оси инерции.

Главные моменты инерции часто обозначают J_1, J_2, J_3 вместо $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$. Для главных осей инерции формула (24) принимает форму

$$J_l = J_1\cos^2\alpha + J_2\cos^2\beta + J_3\cos^2\gamma. \tag{24'}$$